Zadanie 23. (0–2)

Uzasadnij, że pierwszy dzień września i pierwszy dzień grudnia tego samego roku wypadają w tym samym dniu tygodnia.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.

Wymaganie szczegółowe

KLASY IV–VI
XII. Obliczenia praktyczne. Uczeń:
4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie pełne.

1 pkt – stwierdzenie, że od 1 września do 1 grudnia mija 91 dni,
lub
stwierdzenie, że 1 grudnia przypada w tym samym dniu tygodnia, co 1 września, w sytuacji gdy uzasadnienie opiera się na stwierdzeniu, że 1 września wypada w konkretnym dniu tygodnia.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

wrzesień	30 dni
październik	31 dni
listopad	30 dni
Razem:	91 dni

91 : 7 = 13

Od 1 września do 1 grudnia mija równo 13 tygodni, więc 1 września przypada w tym samym dniu tygodnia, co 1 grudnia.

Drugi sposób

Przypuśćmy, że 1 września przypada w poniedziałek, zatem kolejne poniedziałki to: 8, 15, 22 i 29 września, 6, 13, 20 i 27 października, 3, 10, 17 i 24 listopada oraz 1 grudnia. Wynika stąd, że 1 września i 1 grudnia przypadają w tym samym dniu tygodnia. Tak samo jest, gdy 1 września wypada we wtorek, w środę itd. – zawsze 1 grudnia przypada w tym samym dniu tygodnia, co 1 września.

Zadanie 24. (0–3)

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie dane są punkty: *K* = (–2, 8) i *M* = (4, 6). Podaj współrzędne punktu *P* takiego, że jeden z trzech punktów *P, K, M* jest środkiem odcinka o końcach w dwóch pozostałych punktach. Podaj wszystkie możliwości.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII
X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. Uczeń:
4) znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dane są jeden koniec i środek.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie pełne.

2 pkt – rozważenie wszystkich możliwości położenia punktu *P* i przedstawienie poprawnej metody wyznaczenia ich współrzędnych.

1 pkt – rozważenie jednej z możliwości położenia punktu *P* i przedstawienie poprawnej metody wyznaczenia jego współrzędnych.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Są trzy możliwości położenia punktów *P*, *K* i *M*.

- Punkt $P=(x,y)$ jest środkiem odcinka KM.

  $x=\frac{-2+4}{2}=1 \qquad y=\frac{8+6}{2}=7$

  $P=(1,7)$

- Punkt *K* jest środkiem odcinka *PM*, gdzie $P=(x,y)$.

  $-2=\frac{x+4}{2} \qquad 8=\frac{y+6}{2}$

  $x+4=-4 \qquad y+6=16$

  $x=-8 \qquad y=10$

  $P=(-8,10)$

- Punkt *M* jest środkiem odcinka *PK*, gdzie $P=(x,y)$.

  $4=\frac{x-2}{2} \qquad 6=\frac{y+8}{2}$

  $x-2=8 \qquad y+8=12$

  $x=10 \qquad y=4$

  $P=(10,4)$

Odpowiedź: Punkt *P* może mieć współrzędne $(1,7)$, $(-8,10)$ lub $(10,4)$.

Zadanie 25. (0–2)

W tabeli przedstawiono ceny kupna i sprzedaży dwóch walut w kantorze *Pik*.

	Kupno	Sprzedaż
1 dolar	4,18 zł	4,25 zł
1 funt brytyjski	5,10 zł	5,22 zł

Marcin chce wymienić 400 funtów brytyjskich na dolary. W tym celu musi najpierw wymienić funty na złotówki, a następnie – otrzymane złotówki na dolary. Ile dolarów otrzyma Marcin, jeżeli wymieni walutę w kantorze *Pik*? Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.

Wymaganie szczegółowe

KLASY IV–VI
XIV. Zadania tekstowe. Uczeń:
5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie pełne.

1 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia kwoty (w złotych), za jaką kantor zakupił 400 funtów brytyjskich,
lub
przedstawienie poprawnej metody obliczenia kwoty (w dolarach), jaką Marcin otrzyma za 1 funt brytyjski.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

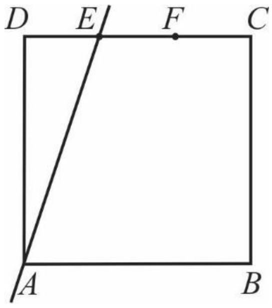
Kantor kupuje od Marcina 400 funtów brytyjskich każdy za 5,10 zł.
$400 \cdot 5{,}10\text{ zł} = 2040\text{ zł}$
Kantor sprzedaje Marcinowi dolary każdy za 4,25 zł.
2040 : 4,25 = 480
Odpowiedź: Za 400 funtów brytyjskich Marcin otrzyma 480 dolarów.

Drugi sposób

Kantor kupuje od Marcina 1 funt brytyjski za $5{,}10$ zł, a sprzedaje mu dolary każdy po 4,25 zł.
5,10 : 4,25 = 1,2
Za każdego funta Marcin otrzymuje 1,2 dolara.
$400 \cdot 1{,}20 = 480$
Odpowiedź: Za 400 funtów brytyjskich Marcin otrzyma 480 dolarów.

Zadanie 26. (0–2)

Bok *CD* kwadratu *ABCD* podzielono punktami *E* i *F* na trzy odcinki równej długości. Przez wierzchołek *A* kwadratu i przez punkt *E* poprowadzono prostą. Pole trójkąta *AED* wynosi 24 cm^2.



Oblicz pole kwadratu *ABCD*. Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne
IV. Rozumowanie i argumentacja.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.

Wymaganie szczegółowe
KLASY IV–VI
XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:
2) oblicza pola: trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu, przedstawionych na rysunku oraz w sytuacjach praktycznych, w tym także dla danych wymagających zamiany jednostek i w sytuacjach z nietypowymi wymiarami, np. pole trójkąta o boku 1 km i wysokości 1 mm.

Zasady oceniania
2 pkt – rozwiązanie pełne.

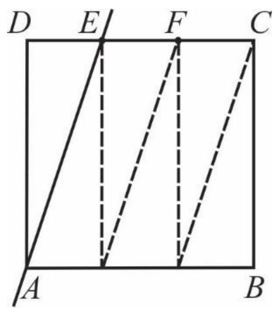
1 pkt – stwierdzenie, że pole kwadratu jest 6 razy większe od pola trójkąta *AED*,
lub
stwierdzenie, że pole połowy kwadratu jest 3 razy większe od pola trójkąta *AED*,
lub
obliczenie długości jednej z przyprostokątnych trójkąta *AED*.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

Zauważmy, że kwadrat *ABCD* można podzielić na 6 trójkątów przystających do trójkąta *AED*.

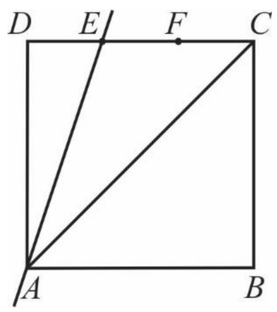


$P = 6 \cdot 24 = 144$ (cm^2)

Odpowiedź: Pole kwadratu *ABCD* jest równe 144 cm^2.

Drugi sposób

Zauważmy, że trójkąt *AED* ma pole 3 razy mniejsze od pola połowy kwadratu. Jest zatem 6 razy mniejsze od pola kwadratu *ABCD*.



$P = 6 \cdot 24 = 144$ (cm^2)

Odpowiedź: Pole kwadratu *ABCD* jest równe 144 cm^2.

Trzeci sposób

Oznaczmy długość boku *DE* trójkąta jako a. Wtedy bok *DA* trójkąta ma długość $3a$.
Z wzoru na pole trójkąta otrzymujemy równanie:

$$24 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 3a$$

$3a^2 = 48$

$a = 4$

$3a = 3 \cdot 4 = 12$

$P = 6 \cdot 24 = 144$ (cm^2)

Odpowiedź: Pole kwadratu *ABCD* jest równe 144 cm^2.

Zadanie 27. (0–2)

W pierwszym zbiorniku było czterokrotnie więcej wody niż w drugim. Po wlaniu 6 litrów wody do każdego z nich, w pierwszym jest dwukrotnie więcej wody niż w drugim. Ile łącznie wody jest teraz w obu zbiornikach? Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII
VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:
4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie pełne.

1 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia początkowej ilości wody w pierwszym zbiorniku
lub
przedstawienie poprawnej metody obliczenia początkowej ilości wody w drugim zbiorniku.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

x — początkowa ilość wody w drugim zbiorniku (w litrach)
$4x$ — początkowa ilość wody w pierwszym zbiorniku (w litrach)
$4x + 6 = 2(x + 6)$
$4x + 6 = 2x + 12$
$x = 3$
W pierwszym zbiorniku było na początku $4 \cdot 3 = 12$ litrów wody, a w drugim były 3 litry.
$12 + 6 = 18$
$3 + 6 = 9$
Po dolaniu:
– w pierwszym zbiorniku jest 18 litrów wody
– w drugim zbiorniku jest 9 litrów wody.
$18 + 9 = 27$

Odpowiedź: Razem w obu zbiornikach jest 27 litrów wody.

Drugi sposób

x — początkowa ilość wody w pierwszym zbiorniku (w litrach)
$\frac{1}{4}x$ — początkowa ilość wody w drugim zbiorniku (w litrach)

$x+6=2\left(\frac{1}{4}x+6\right)$

$x+6=\frac{1}{2}x+12$

$\frac{1}{2}x=6$

$x = 12$

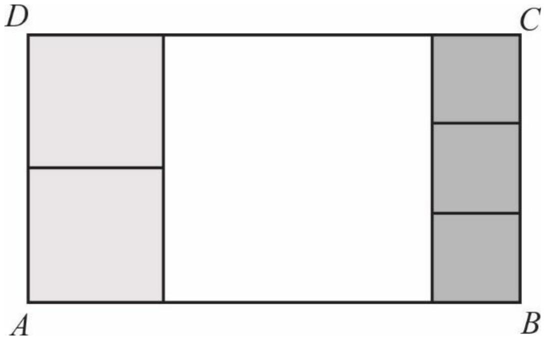
W pierwszym zbiorniku było na początku 12 litrów wody, a w drugim były $\frac{1}{4}\cdot 12=3$ litry.

12 + 6 = 18
3 + 6 = 9
Po dolaniu:
– w pierwszym zbiorniku jest 18 litrów wody
– w drugim zbiorniku jest 9 litrów wody.
18 + 9 = 27

Odpowiedź: Razem w obu zbiornikach jest 27 litrów wody.

Zadanie 28. (0–3)

Prostokąt *ABCD* podzielono na 6 kwadratów: jeden duży, dwa średnie i trzy małe, jak na rysunku.



Uzasadnij, że pole powierzchni dużego kwadratu jest większe niż połowa powierzchni prostokąta *ABCD*.

Wymaganie ogólne
IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe
KLASY VII i VIII
III. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi. Uczeń:
3) zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych.

Zasady oceniania
3 pkt – rozwiązanie pełne.

2 pkt – zapisanie pola prostokąta *ABCD* i pola dużego kwadratu za pomocą wyrażeń algebraicznych zawierających tę samą zmienną
lub
zapisanie długości boku *AB* prostokąta *ABCD* i długości boku dużego kwadratu za pomocą wyrażeń algebraicznych zawierających tę samą zmienną,
lub
stwierdzenie, że dwa średnie kwadraty zajmują połowę powierzchni dużego kwadratu, a trzy małe kwadraty zajmują powierzchnię mniejszą niż połowa powierzchni dużego kwadratu,
lub
uzasadnienie poprawną metodą, lecz z błędami rachunkowymi, że duży kwadrat zajmuje ponad połowę pola prostokąta *ABCD*.

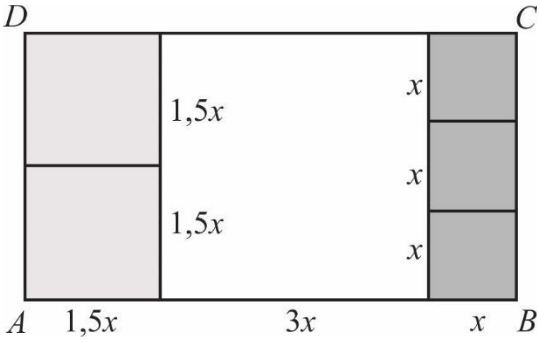
1 pkt – zapisanie zależności między długościami boków kwadratów.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

Jeśli długość boku małego kwadratu oznaczymy przez x, to duży kwadrat ma bok długości $3x$, a średni ma bok długości $1{,}5x$.



Pole prostokąta $ABCD$: $3 \cdot x^2 + (3x)^2 + 2 \cdot (1{,}5x)^2 = 16{,}5x^2$

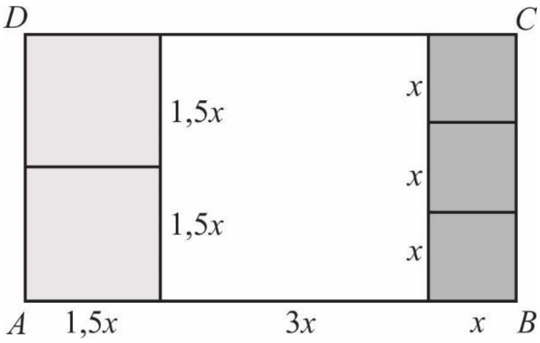
Pole dużego kwadratu: $(3x)^2 = 9x^2$

Połowa pola prostokąta $ABCD$ to $8{,}25x^2$.

Zatem duży kwadrat zajmuje ponad połowę pola prostokąta $ABCD$.

Drugi sposób

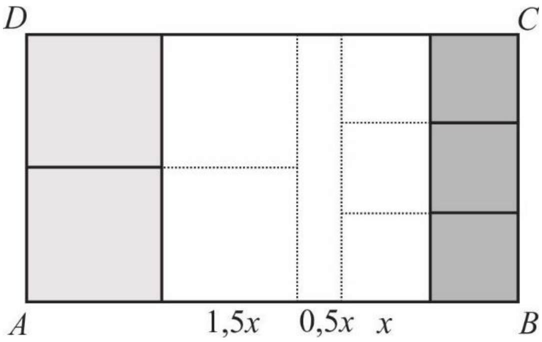
Jeśli długość boku małego kwadratu oznaczymy przez x, to duży kwadrat ma bok długości $3x$, a średni ma bok długości $1{,}5x$.



Obliczmy długość odcinka AB, na którym postawiono prostokąt $ABCD$: $1{,}5x + 3x + x = 5{,}5x$.
Podzielmy prostokąt $ABCD$ na trzy prostokąty o tej samej wysokości AD: pierwszy złożony z 2 średnich kwadratów, drugi – duży kwadrat, a trzeci złożony z 3 małych kwadratów.
Duży kwadrat ma bok długości $3x$.
Połowa długości odcinka AB to $2{,}75x$.
$2{,}75x \cdot 3x < 3x \cdot 3x$

Zatem duży kwadrat zajmuje ponad połowę pola prostokąta $ABCD$.

Trzeci sposób



Zauważmy, że dwa średnie kwadraty zajmują połowę powierzchni dużego kwadratu, a trzy małe kwadraty zajmują powierzchnię mniejszą niż połowa powierzchni dużego kwadratu. Zatem duży kwadrat zajmuje ponad połowę pola prostokąta *ABCD*.

Czwarty sposób

Bok średniego kwadratu jest o połowę mniejszy od boku dużego kwadratu. Stąd pole średniego kwadratu stanowi $\frac{1}{4}$ pola dużego kwadratu.

$$P_{Śr} = \frac{1}{4} P_D$$

Bok małego kwadratu stanowi $\frac{1}{3}$ boku dużego kwadratu. Stąd pole małego kwadratu stanowi $\frac{1}{9}$ pola dużego kwadratu.

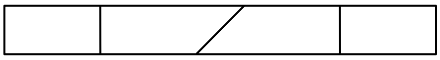
$$P_M = \frac{1}{9} P_D$$

$$2 \cdot P_{Śr} + 3 \cdot P_M = 2 \cdot \frac{1}{4} P_D + 3 \cdot \frac{1}{9} P_D = \frac{1}{2} P_D + \frac{1}{3} P_D = \frac{5}{6} P_D < P_D$$

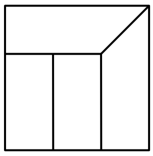
Zatem duży kwadrat zajmuje ponad połowę pola prostokąta *ABCD*.

Zadanie 29. (0–3)

Prostokątny pasek papieru pocięto na cztery części w sposób przedstawiony na rysunku 1. Z tych części ułożono figurę w kształcie kwadratu tak, jak pokazano na rysunku 2. Pole tego kwadratu jest równe 36 cm².



Rysunek 1.



Rysunek 2.

Oblicz obwód paska papieru przed pocięciem. Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.

Wymaganie szczegółowe

KLASY IV–VI

XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

2) oblicza pola: trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu, przedstawionych na rysunku oraz w sytuacjach praktycznych, w tym także dla danych wymagających zamiany jednostek i w sytuacjach z nietypowymi wymiarami, np. pole trójkąta o boku 1 km i wysokości 1 mm.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie pełne.

2 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia obwodu prostokąta
lub
obliczenie wymiarów prostokątów i trapezów, z których zbudowany jest kwadrat (prostokąt: 2 cm × 4 cm, trapez: podstawy – 4 cm i 6 cm, wysokość – 2 cm).

1 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia długości boku kwadratu.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Bok kwadratu ma długość $\sqrt{36} = 6$ (cm). Na tę długość składają się 3 szerokości paska, zatem pasek miał szerokość 6 : 3 = 2 (cm).
Pole paska jest równe polu kwadratu, zatem długość paska, to 36 : 2 = 18 (cm).
Przed pocięciem pasek miał wymiary 2 cm × 18 cm.
$2 \cdot 2 + 2 \cdot 18 = 40$ (cm)
Odpowiedź: Obwód paska papieru przed pocięciem był równy 40 cm.

Zadanie 30. (0–3)

Trzy sąsiadki zamówiły wspólnie kawę w sklepie internetowym. Kawa dla pani Malinowskiej miała kosztować 120 zł, a dla pani Wiśniewskiej i pani Śliwińskiej – po 90 zł. Jednak przy zakupie otrzymały rabat i za zamówioną kawę zapłaciły tylko 260 zł. Ile pieniędzy powinna zapłacić każda z pań, aby jej wpłata była proporcjonalna do pierwotnej wartości zamówienia? Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII
VII. Proporcjonalność prosta. Uczeń:
3) stosuje podział proporcjonalny.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie pełne.

2 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia kwot, które powinna zapłacić każda z sąsiadek.

1 pkt – przedstawienie poprawnej metody:

- wyznaczenia, jaką częścią pierwotnej wartości zamówienia jest kawa zamówiona dla jednej z sąsiadek, np. $\frac{120}{300}=\frac{4}{10}$,
  lub
- wyznaczenia stosunku wartości zamówień, np. 4 : 3 : 3,
  lub
- wyznaczenia stosunku należności po rabacie do pierwotnej wartości zamówienia, np. $\frac{260}{300}=\frac{13}{15}$,
  lub
- wyznaczenia stosunku rabatu do pierwotnej wartości zamówienia, np. $\frac{40}{300}=\frac{2}{15}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

Pierwotna wartość zamówienia to 300 zł.

Koszt kawy pani Malinowskiej stanowi $\frac{120}{300}=\frac{4}{10}$ tej kwoty.

$\frac{4}{10}\cdot 260$ zł = 104 zł — kwota do zapłaty przez panią Malinowską
260 zł – 104 zł = 156 zł — łączna kwota do zapłaty przez panie Wiśniewską i Śliwińską
156 : 2 = 78 zł — kwota do zapłaty przez każdą z pań: Wiśniewską oraz Śliwińską

Odpowiedź: Pani Malinowska powinna zapłacić 104 zł, a panie Wiśniewska i Śliwińska – po 78 zł.

Drugi sposób

4 : 3 : 3 — stosunek pierwotnych wartości zamówień
4 + 3 + 3 = 10
260 zł : 10 = 26 zł
4 · 26 zł = 104 zł — kwota do zapłaty przez panią Malinowską
3 · 26 zł = 78 zł — kwota do zapłaty przez każdą z pań: Wiśniewską oraz Śliwińską

Odpowiedź: Pani Malinowska powinna zapłacić 104 zł, a panie Wiśniewska i Śliwińska – po 78 zł.

Trzeci sposób

$\frac{260}{300}=\frac{13}{15}$

Każda pani powinna zapłacić $\frac{13}{15}$ pierwotnej wartości swojego zamówienia.

pani Malinowska: $\frac{13}{15}\cdot 120$ zł = 13 · 8 zł = 104 zł

panie Wiśniewska i Śliwińska: $\frac{13}{15}\cdot 90$ zł = 13 · 6 zł = 78 zł

Odpowiedź: Pani Malinowska powinna zapłacić 104 zł, a panie Wiśniewska i Śliwińska – po 78 zł.

Czwarty sposób

40 zł — kwota rabatu

$\frac{40}{300}=\frac{2}{15}$

Każda pani powinna zapłacić o $\frac{2}{15}$ pieniędzy mniej niż zakładano pierwotnie.

pani Malinowska: $\frac{2}{15}\cdot 120$ zł = 2 · 8 zł = 16 zł
120 zł – 16 zł = 104 zł

panie Wiśniewska i Śliwińska: $\frac{2}{15}\cdot 90$ zł = 2 · 6 zł = 12 zł
90 zł – 12 zł = 78 zł

Odpowiedź: Pani Malinowska powinna zapłacić 104 zł, a panie Wiśniewska i Śliwińska – po 78 zł.