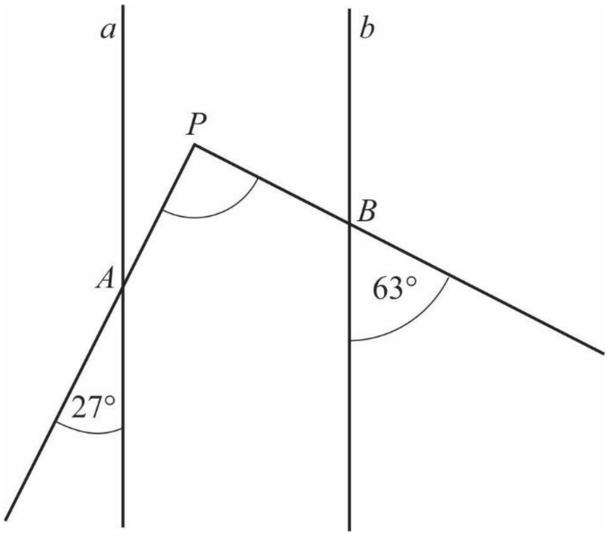
Zadanie 31. (0–2)

Proste *a* i *b* są równoległe.



Półproste *PA* i *PB* przecinają te proste, w wyniku czego tworzą z nimi kąty ostre o miarach podanych na rysunku. Uzasadnij, że kąt *APB* jest prosty.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII
VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:
3) korzysta z własności prostych równoległych, w szczególności stosuje równość kątów odpowiadających i naprzemianległych.

Zasady oceniania

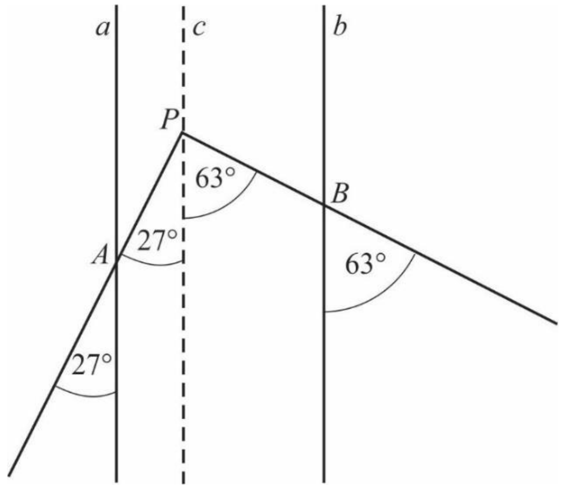
2 pkt – rozwiązanie pełne.

1 pkt – poprowadzenie prostej *c* i zapisanie poprawnej miary co najmniej jednego kąta odpowiadającego do 27° lub 63°
lub
poprowadzenie prostej *AP* lub *PB* i zapisanie poprawnej miary kąta odpowiadającego w trójkącie *APC* lub *BPD*,
lub
poprowadzenie prostej *c* i zapisanie poprawnej miary kątów co najmniej jednego z trójkątów *APC* lub *BPD*,
lub
poprowadzenie prostej *c* i ustalenie miar kątów rozwartych pięciokąta *ACDBP*,
lub
poprowadzenie prostej *c* i zapisanie poprawnych miar kątów *CAP* i *CBP* czworokąta.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

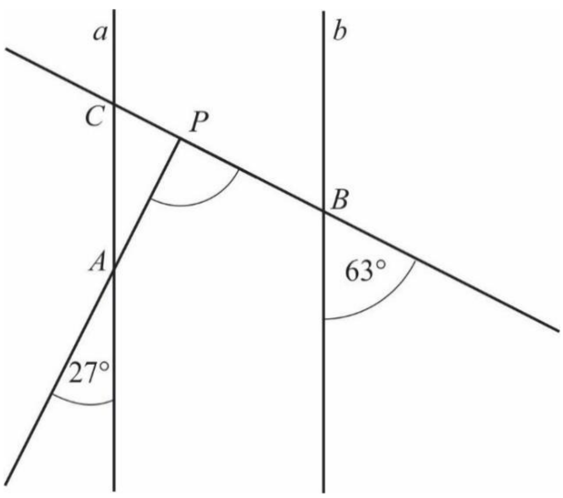
Przykładowe pełne rozwiązania

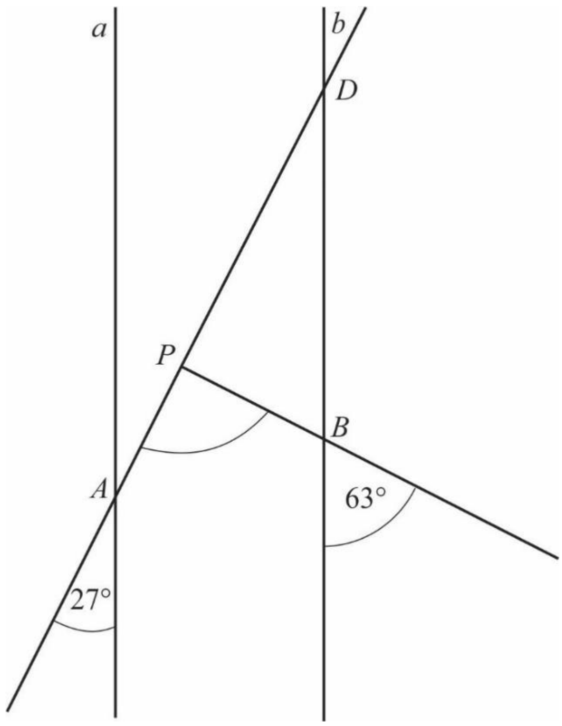
Pierwszy sposób



Przez punkt P prowadzimy prostą c równoległą do a i b. Dzieli ona kąt APB na dwie części, z których jedna jest kątem odpowiadającym do 27°, a druga – do 63°, zatem $|\sphericalangle APB| = 27° + 63° = 90°$.
Kąt APB jest kątem prostym.

Drugi sposób





Przedłużamy półprostą PB do przecięcia z prostą a w punkcie C lub półprostą PA do przecięcia z prostą b w punkcie D. Ustalamy miary dwóch kątów w powstałych trójkątach APC lub BPD. Jeden z kątów jest kątem wierzchołkowym, a drugi – kątem odpowiadającym do kątów odpowiednio 63° i 27°.
Obliczamy miarę trzeciego kąta w powstałych trójkątach APC lub BPD.

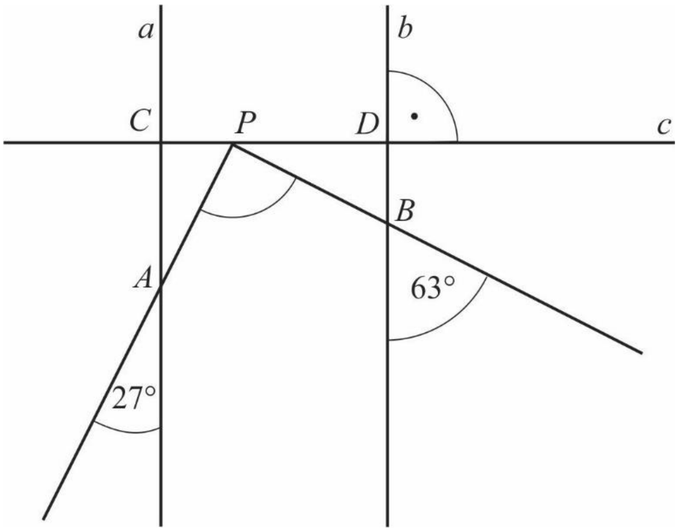
$|\sphericalangle APC| = 180° - (27° + 63°) = 90°$

Kąt *APB* jest kątem przyległym do kąta *APC*, czyli jest kątem prostym.

$|\sphericalangle BPD| = 180° - (27° + 63°) = 90°$

Kąt *APB* jest kątem przyległym do kąta *BPD*, czyli jest kątem prostym.

Trzeci sposób



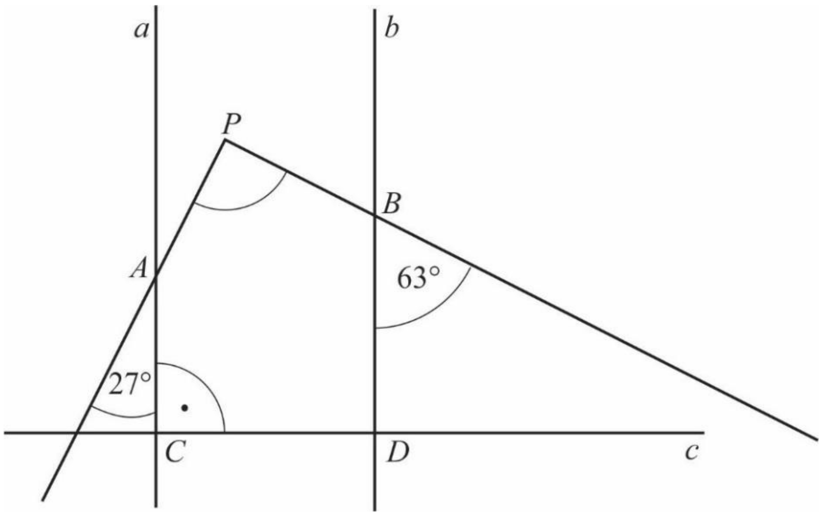
Przez punkt *P* prowadzimy prostą *c* prostopadłą do *a* i *b*. Wyznacza ona dwa trójkąty prostokątne *APC* i *BPD*. Ustalamy miary kątów ostrych tych trójkątów.

$|\sphericalangle CPA| = 90° - 27° = 63°$ oraz $|\sphericalangle BPD| = 90° - 63° = 27°$

$|\sphericalangle APB| = 180° - (27° + 63°) = 90°$

Kąt *APB* jest kątem prostym.

Czwarty sposób



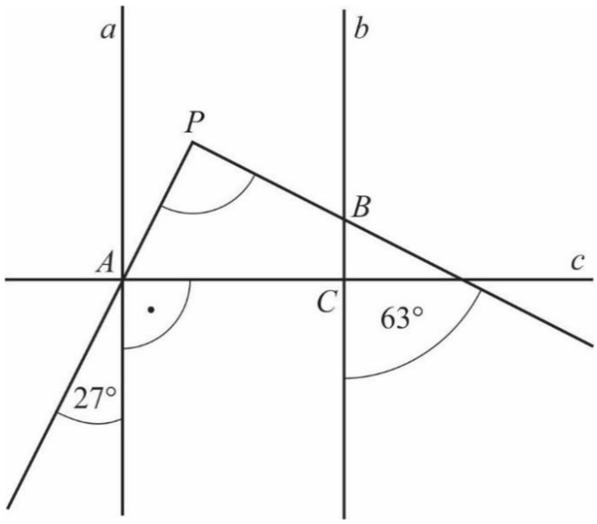
Prowadzimy prostą c prostopadłą do a i b tak, aby powstał pięciokąt wypukły. Ustalamy miary kątów rozwartych tego pięciokąta.

$|\sphericalangle CAP| = 180° - 27° = 153°$ oraz $|\sphericalangle PBD| = 180° - 63° = 117°$

$|\sphericalangle APB| = 540° - (90° + 90° + 117° + 153°) = 90°$

Kąt APB jest kątem prostym.

Piąty sposób



Przez punkt A prowadzimy prostą c prostopadłą do a i b. Wyznacza ona czworokąt $ACBP$. Ustalamy miary dwóch kątów czworokąta.

$|\sphericalangle CBP| = 180° - 63° = 117°$ oraz $|\sphericalangle CAP| = 90° - 27° = 63°$

$|\sphericalangle APB| = 360° - (90° + 117° + 63°) = 90°$

Kąt APB jest kątem prostym.

Zadanie 32. (0–4)

W pojemniku znajdują się niebieskie, czarne i zielone piłeczki. Czarnych piłeczek jest o 20% mniej niż niebieskich, a niebieskich – o 6 mniej niż zielonych. Niebieskich i zielonych piłeczek jest łącznie o 48 więcej niż czarnych. Ile jest wszystkich piłeczek w tym pojemniku? Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII
VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:
4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi.

Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie pełne.

3 pkt – obliczenie liczby piłeczek jednego koloru (poprawne rozwiązanie równania zgodnego z warunkami zadania).

2 pkt – zapisanie poprawnego równania z jedną niewiadomą oznaczającą liczbę piłeczek wybranego/danego koloru.

1 pkt – opisanie – w zależności od liczby piłeczek wybranego koloru – liczby piłeczek pozostałych dwóch kolorów.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

n — liczba niebieskich piłeczek
$0{,}8n$ — liczba czarnych piłeczek
$n + 6$ — liczba zielonych piłeczek

$n + (n + 6) = 0{,}8n + 48$

$2n + 6 = 0{,}8n + 48$

$1{,}2n = 42$

$n = 35$

$0{,}8n = 28$

$n + 6 = 41$

$35 + 28 + 41 = 104$

Odpowiedź: W pojemniku są 104 piłeczki.

Drugi sposób

z — liczba zielonych piłeczek
$z-6$ — liczba niebieskich piłeczek
$0{,}8(z-6)$ — liczba czarnych piłeczek

$z+(z-6)=0{,}8(z-6)+48$

$2z-6=0{,}8z-4{,}8+48$

$1{,}2z=49{,}2$

$z=41$

$z-6=35$

$0{,}8(z-6)=28$

$35+28+41=104$

Odpowiedź: W pojemniku są 104 piłeczki.

Trzeci sposób

c — liczba czarnych piłeczek
$1{,}25c$ — liczba niebieskich piłeczek
$1{,}25c+6$ — liczba zielonych piłeczek

$1{,}25c+(1{,}25c+6)=c+48$

$2{,}5c+6=c+48$

$1{,}5c=42$

$c=28$

$1{,}25c=35$

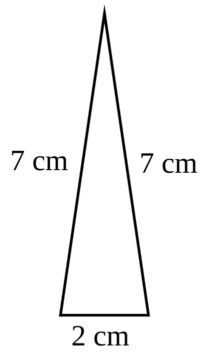
$1{,}25c+6=41$

$35+28+41=104$

Odpowiedź: W pojemniku są 104 piłeczki.

Zadanie 33. (0–4)

Trójkąt przedstawiony na rysunku jest ścianą boczną ostrosłupa prawidłowego trójkątnego.



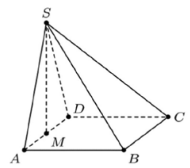
Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

Wymaganie szczegółowe

KLASY VII i VIII
XI. Geometria przestrzenna. Uczeń:
3) oblicza objętości i pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładzie: Prostokąt *ABCD* jest podstawą ostrosłupa *ABCDS*, punkt *M* jest środkiem krawędzi *AD*, odcinek *MS* jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: *AD* = 10 cm, *AS* = 13 cm oraz *AB* = 20 cm. Oblicz objętość ostrosłupa.



Zasady oceniania

4 pkt – rozwiązanie pełne.

3 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia pola powierzchni podstawy ostrosłupa i pola powierzchni ściany bocznej ostrosłupa.

2 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia pola powierzchni podstawy ostrosłupa lub pola powierzchni ściany bocznej ostrosłupa.

1 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia wysokości podstawy lub wysokości ściany bocznej.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązanie

Podstawa ostrosłupa jest trójkątem równobocznym o boku 2 cm.
h — wysokość trójkąta będącego podstawą ostrosłupa
$h^2 + 1^2 = 2^2$
$h = \sqrt{3}$ (cm)

Pole podstawy: $P_p = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$ (cm^2)

w — wysokość ściany bocznej opuszczona na bok długości 2 cm
$w^2 + 1^2 = 7^2$
$w^2 = 48$
$w = \sqrt{48}$
$w = 4\sqrt{3}$ (cm)
$P_{śb} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (cm^2)
$P_c = P_p + 3 \cdot P_{śb} = \sqrt{3} + 3 \cdot 4\sqrt{3} = 13\sqrt{3}$

Odpowiedź: Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe $13\sqrt{3}$ cm^2.

Zadanie 34. (0–2)

Jaskinię Książęcą może zwiedzić codziennie tylko dziesięć grup, które wchodzą po jednej w jednakowych odstępach czasu. Pierwsza grupa rozpoczyna zwiedzanie o 9:00, a ostatnia – o 16:30. Grupa harcerzy przyszła zwiedzić jaskinię o godzinie 13:25. Ile co najmniej minut harcerze będą czekali na wejście do jaskini? Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

IV. Rozumowanie i argumentacja.
3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

Wymaganie szczegółowe

KLASY IV–VI
XII. Obliczenia praktyczne. Uczeń:
3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach.

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie pełne.

1 pkt – przedstawienie poprawnej metody obliczenia czasu zwiedzania jaskini.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

Od godziny 9:00 do 16:30 mija 7 godzin i 30 minut, czyli 450 minut. W tym okresie jest 9 wejść do jaskini, więc jedno zwiedzanie trwa $450 : 9 = 50$ minut.

Od godziny 9:00 do 13:25 jest 265 minut, a ponieważ $265 = 5 \cdot 50 + 15$, więc najbliższe wejście będzie za $50 - 15 = 35$ minut.

Odpowiedź: Harcerze będą musieli poczekać co najmniej 35 minut.

Drugi sposób

Od godziny 9:00 do 16:30 mija 7 godzin i 30 minut, czyli 450 minut. W tym okresie jest 9 wejść do jaskini, więc jedno zwiedzanie trwa $450 : 9 = 50$ minut.

Kolejne wejścia do jaskini przypadają w godzinach: 9:00, 9:50, 10:40, 11:30, 12:20, 13:10, 14:00.

Odpowiedź: Harcerze będą musieli poczekać co najmniej 35 minut.

Zadanie 35. (0–2)

Agnieszka zapisała liczbę czterocyfrową podzielną przez 7. Skreśliła w tej liczbie cyfrę jedności i otrzymała liczbę 496. Jaką liczbę czterocyfrową zapisała Agnieszka? Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.
2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.

Wymaganie szczegółowe

KLASY IV–VI
II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:
3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach).

Zasady oceniania

2 pkt – rozwiązanie pełne.

1 pkt – stwierdzenie, że każdy ze składników sumy $4900 + 6x$ jest podzielny przez 7,
lub
zapisanie dzielenia pisemnego bez wskazania wyniku działania.

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

Liczbę czterocyfrową zapisujemy w postaci $496x$, gdzie x oznacza cyfrę jedności. Liczba 4900 jest podzielna przez 7. Szukamy liczby dwucyfrowej podzielnej przez 7, której cyfra dziesiątek jest równa 6. Przez 7 dzieli się tylko liczba 63.

Odpowiedź: Agnieszka zapisała liczbę 4963.

Drugi sposób

Zapisujemy liczbę czterocyfrową w postaci $496x$, gdzie x oznacza cyfrę jedności i podzielmy ją przez 7.

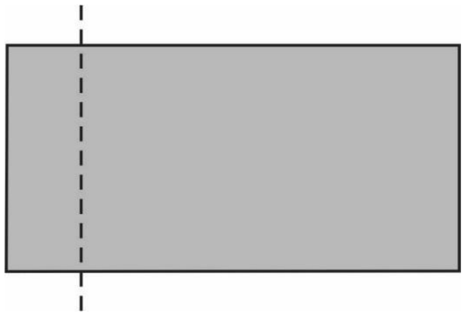
	7	0	9		
4	9	6	x	:	7
4	9				
		6	x		
		6	x		
			0		

Aby reszta z dzielenia była równa 0, to liczba dwucyfrowa $6x$ musi być podzielna przez 7. Stąd x musi być równy 3.

Odpowiedź: Agnieszka zapisała liczbę 4963.

Zadanie 36. (0–3)

Prostokąt o bokach długości 12 i 6 podzielono na dwa prostokąty (patrz rysunek).



Obwód jednego z prostokątów otrzymanych w wyniku podziału jest 2 razy większy od obwodu drugiego. Podaj wymiary prostokąta o mniejszym obwodzie. Zapisz obliczenia.

Wymaganie ogólne

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

Wymaganie szczegółowe

KLASY IV–VI
XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:
1) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków.

Zasady oceniania

3 pkt – rozwiązanie pełne.

2 pkt – zapisanie poprawnego równania
lub
poprawne obliczenie obwodu mniejszego prostokąta
lub
przedstawienie poprawnej metody obliczenia wymiarów prostokąta o mniejszym obwodzie.

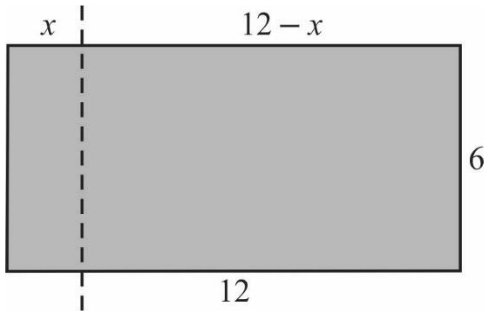
1 pkt – przedstawienie poprawnej metody oznaczenia długości dwóch boków otrzymanych prostokątów
lub
stwierdzenie, że po przesunięciu linii podziału suma obwodów otrzymanych figur się nie zmieni,
lub
dokonanie podziału prostokąta na dwa mniejsze prostokąty i obliczenie obwodów otrzymanych figur (metoda prób i błędów).

0 pkt – rozwiązanie, w którym nie dokonano istotnego postępu.

Przykładowe pełne rozwiązania

Pierwszy sposób

Dzielimy prostokąt na dwa prostokąty. Dwa boki otrzymanych prostokątów oznaczamy tak, jak pokazano na rysunku.



Obwód mniejszego prostokąta jest równy $2 \cdot x + 2 \cdot 6 = 2x + 12$

Obwód większego prostokąta jest równy $2 \cdot (12 - x) + 2 \cdot 6 = 36 - 2x$

Obwód jednego prostokąta jest 2 razy większy od obwodu drugiego, co zapisujemy za pomocą równania.

$36 - 2x = 2 \cdot (2x + 12)$

$36 - 2x = 4x + 24$

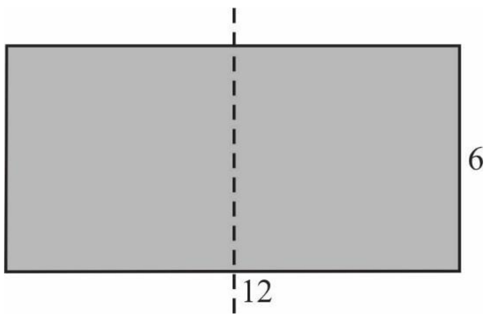
$12 = 6x$

$x = 2$

Odpowiedź: Prostokąt o mniejszym obwodzie ma wymiary 6 i 2.

Drugi sposób

Dzielimy prostokąt na 2 kwadraty o obwodach 24.



Suma obwodów kwadratów jest równa 48. Zauważmy, że jeśli przesuniemy linię podziału, suma obwodów otrzymanych figur się nie zmieni.

Łączny obwód szukanych prostokątów jest równy 48, stosunek tych obwodów jest równy 2 : 1.

Zatem obwód mniejszego prostokąta jest równy $48 : 3 = 16$

Skoro jeden bok tego prostokąta jest równy 6, to drugi bok ma długość $\frac{16}{2} - 6 = 2$

Odpowiedź: Prostokąt o mniejszym obwodzie ma wymiary 6 i 2.

Trzeci sposób

Dzielimy prostokąt na 2 kwadraty o obwodach 24.
Przesuwamy linię podziału i otrzymujemy dwa prostokąty. W każdym z nich długość jednego boku zmienia się, a drugiego wynosi 6. Sprawdzamy, jaki jest iloraz obwodów otrzymanych prostokątów.

większy prostokąt		mniejszy prostokąt		iloraz obwodu większego prostokąta do mniejszego
długość jednego boku	obwód	długość jednego boku	obwód	
8	28	4	20	$\frac{28}{20} < 2$
9	30	3	18	$\frac{30}{18} < 2$
10	32	2	16	$\frac{32}{16} = 2$
11	34	1	14	$\frac{34}{14} > 2$

Odpowiedź: Prostokąt o mniejszym obwodzie ma wymiary 6 i 2.